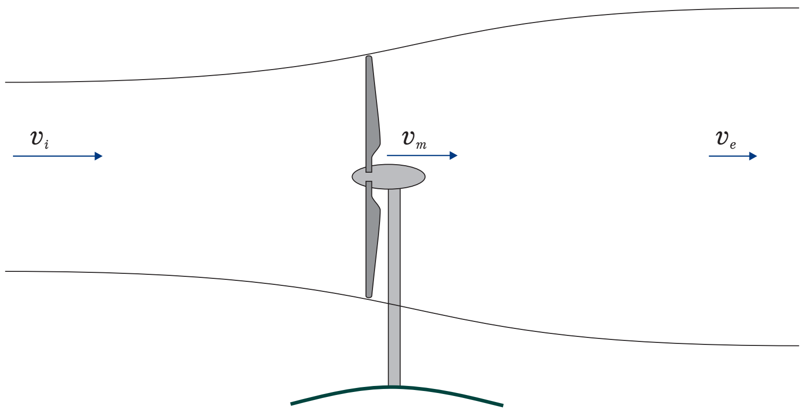
Udledning af en vindmølles maksimale effektivitet

Indhold

1 Vindrøret omkring møllen

For at kunne bestemme en vindmølles maksimale effektivitet, må vi først se på et passende vindrør omkring møllen. Vindrøret skal illustrere, hvordan vinden strømmer forbi møllen. Vindens fart foran møllen kaldes for v_i, vindens fart ved møllen kaldes for v_m og vindens fart efter møllen kaldes for v_e.



Figur 1: Et vindrør omkring en vindmølle

Når vinden passerer vindmøllen, vil en del af vindens kinetiske energi blive overført til møllen. Derved aftager vindens fart, da vindens kinetiske energi bliver mindre. Hvor stor en del af den kinetiske energi, der overføres til møllen, afhænger af møllens konstruktion, vindens fart og hvordan vinden passerer møllen. Ved at benytte forholdet mellem vindens fart bag ved møllen og foran, kan vi få et mål for, hvor stor en del af energien, der overføres til møllen. Vi indfører størrelsen α givet ved

$$\alpha = \frac{v_e}{v_i}.$$

Opgave 1

α er forholdet mellem vindens fart efter passagen af møllen og inden passagen.

a) Hvorfor kan α bruges som et mål for, hvor meget energi der overføres til møllen?

b) Hvor lille og hvor stor kan α blive set ud fra et matematisk synspunkt?

c) Hvad betyder det rent fysisk, når α er mindst? Når α er størst?

d) Tegn vindrør, der passer til de to ekstreme værdier af α.

Svarene på ovenstående opgave tyder altså på, at man ikke kan overføre hele vindens energi til møllen, men at der må være en værdi af α ind imellem, som giver den øvre grænse for udnyttelsen af vindens kinetiske energi.

2 Bevarede størrelser

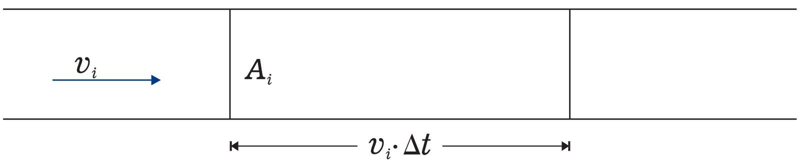
I vindrøret på figur 1 er der ved passage af møllen massebevarelse, energibevarelse og impulsbevarelse. Lad os se lidt nærmere på de tre bevarede størrelser.

2.1 Massebevarelse

Hvis vi ser på et vindrør med tværsnitsareal A_i foran møllen, kan det udledes, at den masse der passerer tværsnittet i tiden Δt er givet ved

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \cdot v_i \cdot A_i.$$

Her er ρ luftens massefylde i røret.



Figur 2: Et vindrør foran møllen parallelt med vindens hastighed.

Opgave 2

Udled udtrykket for massen, der passerer tværsnittet A_i i tiden Δt ud fra figur 2.

Vi antager nu, at luftens densitet ikke ændrer sig ved passagen af møllen, og at den mængde luft, som nærmer sig møllen også passerer møllen og bevæger sig videre bagved møllen. Under de antagelser vil massen af luftmængden i vindrøret være bevaret i passagen af møllen, og vi får således følgende udtryk for den masse, der passerer møllen i tiden Δt:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \cdot v_i \cdot A_i = \rho \cdot v_m \cdot A_m = \rho \cdot v_e \cdot A_e.$$

Her er A_m og A_e henholdsvis tværsnitsarealet ved møllen og efter møllen.

2.2 Impulsbevarelse

Inden vi kan benytte impulsbevarelsen i udledningen af en vindmølles maksimale effekt, må vi have introduceret impulsbegrebet. Impulsen, p, eller også kaldet bevægelsesmængden, for en partikel med hastighed v og masse m defineres ved

$$p = m \cdot v.$$

Fra mekanikken ved vi, at der kræves en påvirkning med en kraft, F, hvis hastigheden af en partikel skal ændres. Sammenholder vi det med definitionen af impuls, kan impulsen altså kun ændres, hvis partiklen påvirkes af en kraft. Selvfølgeligt forudsat at massen af partiklen er konstant. Fra kinematikken ved vi yderligere, at ændringen i hastighed pr. tid for en partikel er lig partiklens acceleration. Heraf følger så

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot a = F, \qquad m = \text{konstant}.$$

Tilvæksten i impuls, Δp, divideret med tiden Δt er altså lig den kraft, som partiklen påvirkes med. Δt er den tid kraften virker i.

Opgave 3

Undersøg om enhederne på venstre side stemmer overens med enheden på højre side af ovenstående ligning, dvs. undersøg om

$$\left[\frac{\Delta p}{\Delta t}\right] = N.$$

Sammelignes ovenstående med Newtons anden lov, fås følgende vigtige sammenhæng

$$F_{res} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

og heraf ses det, at hvis den resulterende kraft på en partikel er nul, vil ændringen i impuls også være nul og impulsen vil således være konstant. Dette giver os følgende vigtige resultat:

Hvis den resulterende kraft på en partikel er nul, er partiklens impuls konstant.

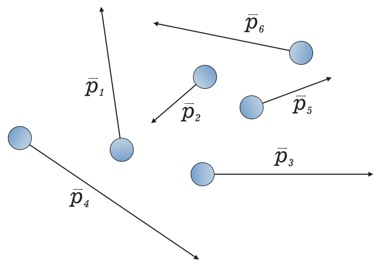
Vi har nu fået introduceret impulsbegrebet i én dimension, men når vi skal se på et system bestående af mange partikler som f.eks. vinden i vindrøret omkring møllen, giver det i stedet for mening at benytte vektoranskuelsen til beskrivelse af systemets impuls. Partiklerne kan nemlig, mere eller mindre uafhængigt af hinanden, have bevægelser i både x-, y- og z-retningen på samme tid og kan derfor også have impuls i alle tre retninger på samme tid. Vektoranskuelsen giver os mulighed for at tage højde for bevægelsen i alle tre retninger med de samme ligninger.

Den totale impuls, $\vec{p}_{tot}$, af et system bestående af mange partikler defineres som summen af impulserne af de enkelte partikler, dvs.

$$\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n = \sum_{j=1}^{n} \vec{p}_j,$$

hvor n er antallet af partikler og $\vec{p}_j$ er impulsen af den j'te partikel. Kraftpåvirkningerne på de enkelte partikler i systemet kan deles op i ydre kræfter, der stammer udefra, og indre kræfter, som skyldes partiklernes påvirkning af hinanden. Dvs. hvis $\vec{F}_j$ er kraftpåvirkningen på den j'te partikel i systemet, kan vi opdele kraften i en ydre kraft, $\vec{F}_{j,y}$ og en indre kraft, $\vec{F}_{j,i}$ således at

$$\vec{F}_j = \vec{F}_{j,y} + \vec{F}_{j,i}.$$



Figur 3: Et system af partikler med hver deres impuls.

Og dermed får vi, at den totale impulsændring pr tidsændring for systemet er givet ved

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta \vec{p}_{tot}}{\Delta t} &= \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} + \cdots + \frac{\Delta \vec{p}_n}{\Delta t} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta \vec{p}_j}{\Delta t} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\vec{F}_{j,y} + \vec{F}_{j,i}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{j,y} + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{j,i}
\end{aligned}$$

De indre kræfter på partiklerne i systemet opstår fordi partiklerne påvirker hinanden. Der foregår hele tiden små stødprocesser, som får kræfter til at opstå mellem partiklerne. Men pga. af Newtons 3. lov vil der altid opstå to modsatrettede kræfter, der er lige store, når to partikler støder sammen. Kræfterne vil derfor udligne hinanden og den resulterende kraft vil være lig nul. Det vil altså sige, at på grund af loven om aktion og reaktion, vil summen af de indre kræfter i systemet være lig nul og vi kan derfor sætte

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{j,i} = 0.$$

Dette betyder så, at systemets impuls kun kan ændre sig, hvis systemet påvirkes af en kraft udefra, dvs.

$$\frac{\Delta \vec{p}_{tot}}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{j,y} = \vec{F}_{y,tot}.$$

Ovenstående ligning er faktisk en udvidelse af Newtons tre love til også at gælde for partikelsystemer, og på samme måde som for en enkelt partikel gælder der, at hvis der ikke forekommer ydre kræfter, vil den samlede impuls være bevaret. Dette leder os frem til følgende vigtige resultat:

I et isoleret partikelsystem er den samlede impuls bevaret.

Vinden og møllen udgør et isoleret system og vi kan nu udnytte, at den samlede impuls er bevaret i vindrøret. I det følgende indføres en forenkling af systemet idet vi vil se på luften omkring møllen som et partikelsystem, der består af partikler med ens hastighed i vindrørets retning. Med denne forenkling kan vi undgå vektoranskuelsen, da partiklerne kun vil have impuls i en og samme retning. Vi får så at den samlede impuls foran møllen, p_i, og den samlede impuls bagved møllen, p_e, er givet ved

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{j,i} \qquad \text{og} \qquad p_e = \sum_{j=1}^{n} p_{j,e}.$$

Her er $p_{j,i}$ og $p_{j,e}$ impulsen af de enkelte partikler henholdsvis foran og bagved møllen. Læg mærke til at der hver gang summes over n partikler, da systemet jo er isoleret og da vi forventer, at alle partikler passerer møllen. Rumfanget, som summen dækker over, er givet ved $V = A_i \cdot \Delta t \cdot v_i = A_e \cdot \Delta t \cdot v_e$. Ligeledes skal man også være opmærksom på, at luften består af forskellige partikler med forskellige masser, og derfor har de også forskellige impulser. Dette skal der tages højde for, hvis luftens samlede impuls skal bestemmes.

Opgave 4

Tør luft ved 15°C har densiteten $\rho = 1,225\,kg/m^3$ og molarmassen $28,96\,g/mol$. Undersøg hvilke partikler luften består af og bestem de forskellige partiklers bidrag til den samlede impuls for $1\,m^3$ luft, der har farten $4,5\,m/s$.

Fordi vindens fart aftager ved passagen af møllen, vil vindens impuls være mindre bagved møllen. Vinden afgiver altså impuls og da der er impulsbevarelse i systemet, vil møllen modtage den afgivne impuls. Per tidsenhed gælder der derfor følgende:

$$\frac{\Delta p_m}{\Delta t} = \frac{\Delta p_i - \Delta p_e}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot v_i - \Delta m \cdot v_e}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot (v_i - v_e)$$

Her er $\Delta p_m / \Delta t$ den impuls møllen modtager per tidsenhed. Ovenfor så vi, at impulsændringen pr. tid netop er lig den resulterende kraft og derfor får vi, at

$$F_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot (v_i - v_e),$$

hvor F_m er kraften fra vinden på møllen.

2.3 Energibevarelse

På samme måde som impulsen, er energien også bevaret i et isoleret system, og det vil vi nu udnytte til at finde et udtryk for vindens effekt på møllen. Men for nemhedens skyld vil vi forenkle anskuelsen en smule. Vi vil antage, at vinden kun har kinetisk energi foran og bagved møllen og vi vil se bort fra vindens gnidning med møllen og sig selv, og at vinden bliver bragt i rotation af møllen ved opbremsningen. Med disse forenklinger kan vi nøjes med at se på vindens kinetiske energi. Den mængde energi der pr. tidsenhed overføres til møllen er givet ved

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta E_m}{\Delta t} &= \frac{\Delta E_i}{\Delta t} - \frac{\Delta E_e}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v_i^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v_e^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot (v_i^2 - v_e^2)
\end{aligned}$$

og det er netop vindens effekt på møllen. Vinden yder altså et arbejde på møllen med ovenstående effekt og da der gælder at $P = F \cdot v$, får vi nu følgende udtryk:

$$P_m = F_m \cdot v_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot (v_i^2 - v_e^2).$$

Fra afsnittet om impulsbevarelse kender vi udtrykket for F_m, som indsættes i ligningen ovenfor. Heraf kan vi udlede følgende udtryk for v_m:

$$v_m = \frac{1}{2} \cdot (v_i + v_e).$$

Vindens fart ved møllen er altså gennemsnittet af farten foran møllen og bagved møllen.

Opgave 5

Udled udtrykket for v_m.

3 Vindmøllens effektivitet

Vi definerer nu vindmøllens effektivitet, η, til at være forholdet mellem den energi møllen modtager pr. tid, P_m, og den totale mængde vindenergi pr tid, P_0, der er til rådighed ved møllen. Det vil sige

$$\eta = \frac{\frac{\Delta E_m}{\Delta t}}{\frac{\Delta E_0}{\Delta t}} = \frac{P_m}{P_0}.$$

Den totale vindenergi, der er til rådighed ved møllen, må være den energi, som vinden i vindrøret bringer med sig. Altså den energi, der passerer et vindrør med tværsnit A_m, hvis møllen ikke er der. Af massebevarelsen får vi, at der må gælde at

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{\Delta E_0}{\Delta t} \\ &= \frac{1/2 \cdot \Delta m \cdot v_i^2}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_i \cdot A_m \cdot v_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_m \cdot v_i^3 \end{aligned}$$

Vi har nu fundet alle de udtryk, som vi har behov for, og vi kan nu reducere udtrykket for η:

$$
\begin{aligned}
\eta &= \frac{P_m}{P_0} \\
&= \frac{F_m \cdot v_m}{P_0} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot (v_i^2 - v_e^2)}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_m \cdot v_i^3} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_m \cdot v_m \cdot (v_i^2 - v_e^2)}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_m \cdot v_i^3} \\
&= \frac{v_m \cdot (v_i^2 - v_e^2)}{v_i^3} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot (v_i + v_e) \cdot (v_i^2 - v_e^2)}{v_i^3} \\
&= \frac{1}{2} \frac{v_i \cdot (1 + \frac{v_e}{v_i}) \cdot v_i^2 \cdot (1 - \frac{v_e^2}{v_i^2})}{v_i^3} \\
&= \frac{1}{2} \frac{v_i^3 \cdot (1 + \alpha) \cdot (1 - \alpha^2)}{v_i^3} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (1 + \alpha) \cdot (1 - \alpha^2)
\end{aligned}
$$

og hvis vi lader η være en funktion af α får vi

$$\eta(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \alpha) \cdot (1 - \alpha^2)$$

Her er α lig forholdet mellem v_e og v_i som vi definerede i starten af dokumentet. Funktionen er vist nedenfor.

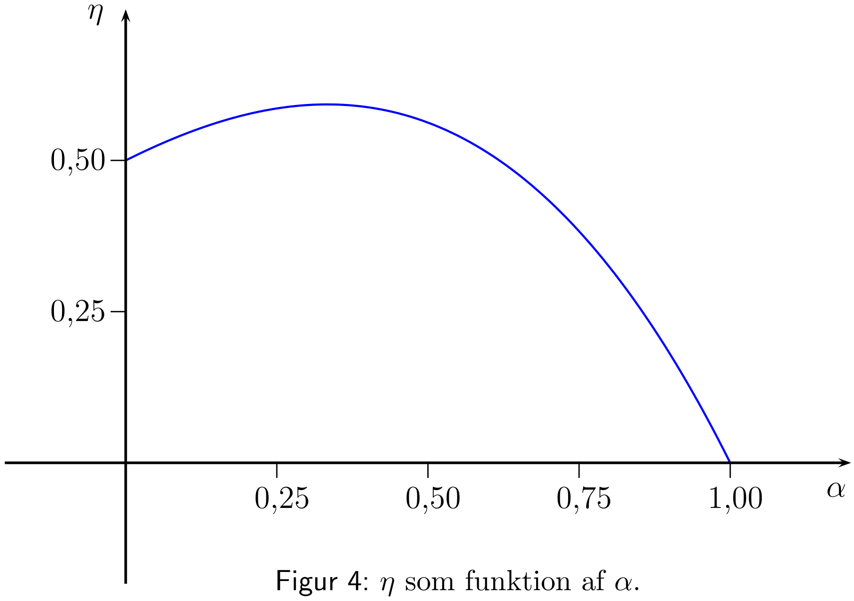
Opgave 6

Opgaven går ud på at analysere grafen for η nærmere. Se figur 4.

a) Påstand: Jo mere energi, der kan overføres fra vinden til møllen, desto mere elektricitet producerer vindmøllen.
Argumenter vha. grafen om denne påstand er sand eller falsk.

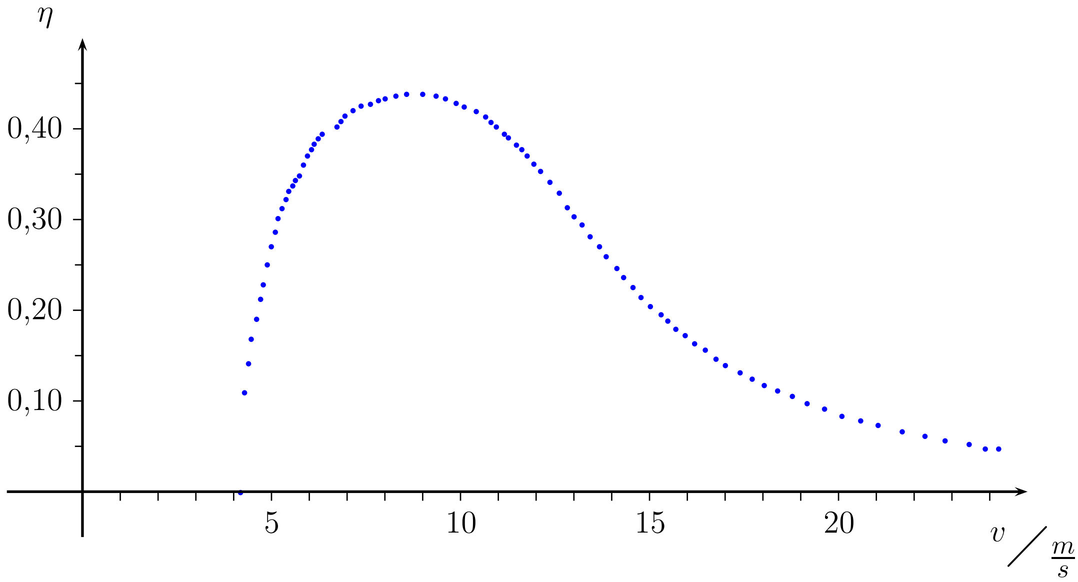
b) Vis, at $\eta(\alpha)$ har maksimum for $\alpha = 1/3$.

c) Beregn en vindmølles maksimale effektivitet og forklar, hvad denne værdi betyder i praksis.



Figur 4: η som funktion af α.

Figur 5 viser plottet af η som funktion af vindhastigheden for en typisk dansk vindmølle. Her ses det tydeligt, at vindmøllens effektivitet afhænger af vindhastigheden.



Figur 5: Effektiviteten af en typisk vindmølle som funktion af vindhastigheden.

Opgave 7

Aflæs for passende vindhastigheder vindmøllens effektivitet i figur 5. Beregn herefter vindmøllens effekt for de forskellige aflæste vindhastigheder og plot så effekten som funktion af vindhastigheden. Sammenlign plottet med figur 5 og forklar, hvorfor de er forskellige.

4 Kilder

Vindenergi og vindmøller, Elvekjær og Nielsen, F&K-forlaget 1980, 1. udgave, 2. oplag.

Spektrum 1, Claussen, Both og Hartling, Gyldendal 2007, 1.udgave, 3. oplag.

Grundlæggende fysik, Øhlenschlæger, Gyldendal 1988, 1. udgave, 1. oplag.

Videregående fysik, Øhlenschlæger, Gyldendal 1991, 1. udgave. 1. oplag.